Mirella **Rainotti**

MathClub *blu*

Algebra 2

con CD-Rom

CEDAM scuola

Mirella **Rainotti**

MathClub *blu*

Algebra 2

CEDAM scuola

CEDAM scuola

internet: www.cedamscuola.it
e-mail: info@cedamscuola.it

La Casa Editrice è certificata da
CISQCERT
In conformità alla norma UNI EN ISO 9001:2008
per l'attività di «Progettazione e realizzazione
di prodotti per l'editoria scolastica»
(certificato n. 02.565)

Redattore responsabile:	Stefano Ganci
Tecnico responsabile:	Gianluigi Ronchetti
Redazione:	Monica Mattei; Giovanna Sergio
Progetto grafico:	Carla Devoto
Copertina:	Simona Corniola
Impaginazione e prestampa:	Bama, Vaprio d'Adda (MB)
Art Director:	Nadia Maestri

I contenuti della sezione "Informath" sono a cura del professor Domenico Ciceri.

Le schede sulla modellistica "Modelli e realtà" sono a cura di Alberto Abbondandolo e Giovanni Gaiffi.

Si ringrazia il professor Antonio Re per la collaborazione didattica prestata nella realizzazione dell'opera.

Le illustrazioni in copertina e nelle pagine di apertura delle unità sono state realizzate da Vito Carta.

1ª edizione: febbraio 2011
Printed in Italy

Le fotografie di questo volume sono state fornite da De Agostini Editore Picture Library; iStockphoto.

Stampa: A.G.F. Italia - Peschiera Borromeo (MI)

Ristampa	0 1	2 3	4 5	6 7	8 9	10 11
Anno	2011	2012	2013	2014	2015	2016

INDICE

Unità 3 SISTEMI LINEARI

Unità 4 EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Unità 5 EQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO

Unità 6 SISTEMI ALGEBRICI NON LINEARI

Unità 7 PARABOLA E CIRCONFERENZA

Unità 8 DISEQUAZIONI ALGEBRICHE

Unità 9 DATI E PREVISIONI: PROBABILITÀ

Unità 10 ELEMENTI DI INFORMATICA 2

Presentazione

Math Club *blu* è un corso progettato e scritto tenendo conto delle Indicazioni nazionali per il quinquennio dei nuovi licei (DPR 89, 15/03/2010) e, nello specifico, per il nuovo liceo scientifico e il nuovo liceo scientifico delle scienze applicate.

Le Indicazioni nazionali (scandite in due bienni e 5° anno) suddividono gli obiettivi specifici di apprendimento in quattro temi:
- Aritmetica e algebra
- Geometria
- Relazioni e funzioni
- Dati e previsioni

I primi volumi del corso (Math Club *blu* 1, 2, e Math Club *blu* Geometria) propongono gli argomenti relativi al primo biennio mantenendo una suddivisione tra argomenti per il primo e per il secondo anno con riferimento alla pratica didattica più diffusa.
Nella Guida per l'insegnante sono specificate le competenze che lo studente dovrebbe raggiungere alla fine del primo biennio, e per ogni competenza quali sono le abilità e le conoscenze coinvolte e in quali Unità del corso sono riscontrabili.
Si è scelto altresì di proporre un'Unità sulla Logica (anche se non più citata espressamente nelle Indicazioni) sia per la sua valenza formativa, sia per la valenza propedeutica allo studio della Geometria.

Le caratteristiche di Math Club *blu*

Semplificazione

- Nell'esposizione della teoria si è cercato di utilizzare un linguaggio semplice e facilmente accessibile per gli studenti.
- Gli argomenti sono stati introdotti attraverso esempi in modo da rendere più evidente e intuitiva l'esposizione successiva.
- Gli esercizi sono organizzati con riferimento ai paragrafi della teoria e differenziati per tipologie, evitando "tecnicismi ripetitivi o casistiche sterili" (*Indicazioni nazionali, Matematica, Linee generali e competenze*).

Trattazione di nuovi argomenti nel primo biennio

- Introduzione alle funzioni goniometriche, collegandole all'equazione di una circonferenza, considerando un punto che si muove sulla circonferenza ed esprimendo le sue coordinate in funzione dell'angolo.
- Introduzione ai vettori, presentati in Geometria quando si affrontano le traslazioni.
- Introduzione alle matrici e al calcolo matriciale, affrontati nell'Unità dedicata ai sistemi lineari.

Collegamenti con la fisica

- Il corso fornisce gli strumenti matematici di base per lo studio dei fenomeni fisici e propone esercizi tratti dalla fisica.

Modello matematico e modellizzazione

- A questo argomento, più volte ricorrente nelle Indicazioni, sono dedicate le schede, ricorrenti in tutto il corso, intitolate "*Modelli e realtà*", che ne presentano diverse casistiche in forma di dialogo fra due giovani studenti.

Ragionare e dimostrare

- Tutta l'impostazione del corso è finalizzata ad abituare lo studente a impostare il ragionamento in modo matematicamente corretto. Vengono proposte ad esempio: semplici applicazioni del principio di induzione, schematizzazioni sulle procedure opportune per impostare la risoluzione dei problemi algebrici e geometrici, l'introduzione al concetto di algoritmo per la soluzione dei problemi.

Dati e previsioni

- La trattazione degli argomenti di statistica e probabilità previsti per il primo biennio viene affrontata in due specifiche Unità.

Conoscenza e uso degli strumenti informatici

- Due Unità del corso presentano il concetto di algoritmo, la sua rappresentazione e un'introduzione al concetto di calcolabilità, come previsto dalle Indicazioni nazionali.
- Tutto il corso è corredato da un ricco apparato di schede dedicate sia al laboratorio di algebra con utilizzo di Excel e Derive, sia al laboratorio di Geometria con uso di GeoGebra, esercizi dinamici e lezioni su CD-ROM in cui si visualizzano passo per passo le costruzioni geometriche e si interagisce con le figure.

Matematica e storia

- Le rubriche "Matematica e storia", distribuite nelle Unità del corso, raccontano curiosità o aneddoti matematici e contestualizzano gli argomenti di matematica nel contesto storico in cui si sono sviluppati.

Geometria

- Nel volume **Math Club *blu* Geometria** e nella sezione di Geometria dei volumi 1 e 2 di **Math Club *blu* Matematica**, gli argomenti sono trattati da un punto di vista geometrico sintetico, lasciando la trattazione analitica nella sezione dedicata all'Algebra; il percorso di apprendimento tracciato dal manuale è integrato dal CD-ROM allegato al corso e dalle estensioni online che, sfruttando le caratteristiche del software GeoGebra, offrono originali strumenti di lavoro, utili al docente nel momento della spiegazione e allo studente nello studio personale.

CD-ROM

- *Zona Matematica offline*, esercizi interattivi per l'autovalutazione.
- *Palestra per il recupero*, esercizi svolti e guidati per affrontare i punti critici della teoria.
- *English for Math*, glossario bilingue italiano-inglese dei termini chiave e delle principali locuzioni utilizzate in Matematica.
- Guide introduttive ai software:
  - Derive
  - GeoGebra (per Math Club *blu* Matematica)
  - Cabri (per Math Club *blu* Matematica)
- Geometria *online* (per Math Club *blu* Matematica), lezioni ed esercitazioni interattive di Geometria.

Il sito web dedicato al corso

- *Palestra per il recupero*, ulteriori esercizi svolti e guidati per affrontare i punti critici della teoria.
- 20 learning object interattivi.
- Aggiornamenti periodici relativi alla Geometria.
- (Per il docente) Soluzioni di verifiche e test contenuti nel volume cartaceo.

- **Zona Matematica**

  Zona Matematica è il portale di De Agostini Scuola dedicato all'insegnamento e apprendimento della matematica, a cui si può accedere dalla home page del sito **www.scuola.com**, sia direttamente sia dalla scheda dedicata a questo corso (digitandone il titolo o il codice ISBN).
  Dopo l'autenticazione è possibile accedere a un database di esercizi e al software *eTutor*, progettato per la verifica e la valutazione dell'apprendimento sia in **modalità docente** sia in **modalità studente**.

  Modalità docente: con il software *eTutor* è possibile:
  - modificare e creare verifiche per la classe, modulari o di fine periodo;
  - somministrarle alla classe, sia via web sia su formato Word stampabile;
  - correggere automaticamente le verifiche stesse;
  - monitorare lo stato di esecuzione;
  - scegliere e impostare i parametri di valutazione (sintetici o analitici);
  - costruire un registro della classe.

  Modalità studente: lo studente ha a disposizione un ambiente in cui:
  - svolgere autonomamente esercizi per il recupero e il potenziamento con autocorrezione;
  - svolgere le verifiche personalizzate assegnategli dal docente (con password).

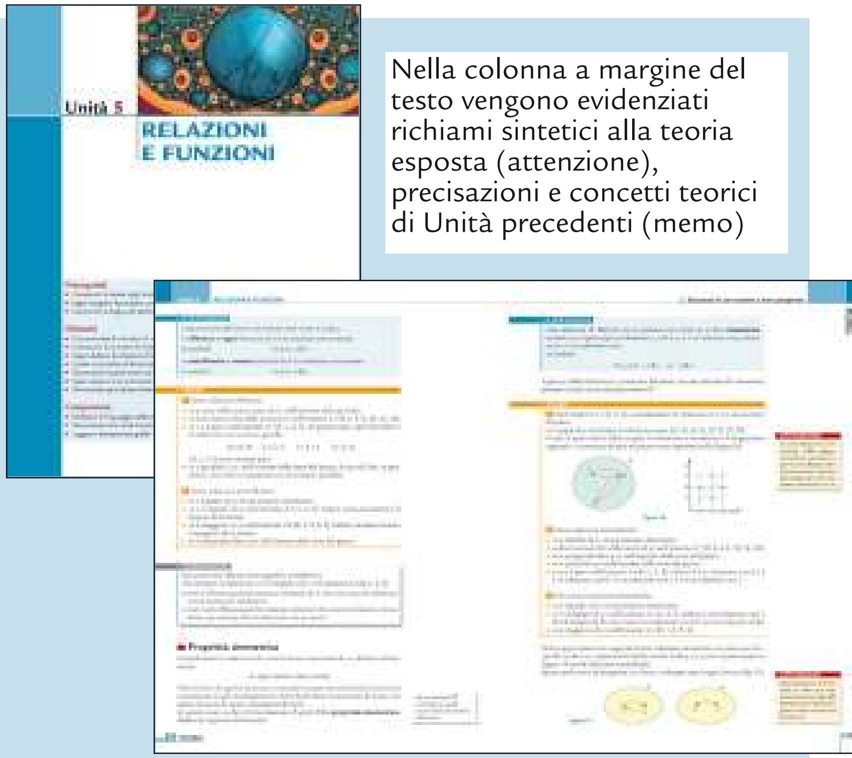
Le pagine del corso

Teoria

In apertura di Unità prerequisiti, obiettivi e competenze consentono di affrontare consapevolmente i contenuti

Nell'esposizione della **teoria** sono evidenziati definizioni, assiomi, teoremi e regole

Gli **esempi** introducono gli argomenti in modo da rendere più evidente e intuitiva l'esposizione successiva



Nella colonna a margine del testo vengono evidenziati richiami sintetici alla teoria esposta (attenzione), precisazioni e concetti teorici di Unità precedenti (memo)

Esercizi e problemi

Le pagine di **S.O.S. Sintesi** ripropongono i concetti essenziali della teoria prima di affrontare gli esercizi

Le pagine di **esercizi** sono organizzate con riferimento ai titoli dei paragrafi della teoria

Gli esercizi sono scanditi in:
- **Conoscere i fondamentali**
- **Esercizi svolti e guidati**
- **Test**
- **Verifica**

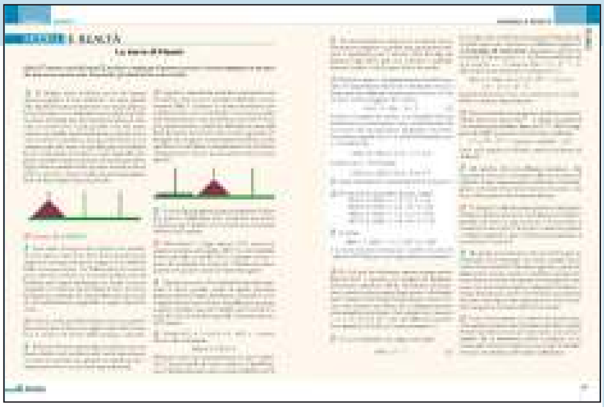
* 20 Un asterisco indica gli esercizi di maggiore complessità

SCHEDE E LOGHI

MATEMATICA E STORIA	Curiosità e riferimenti alla storia della matematica
OSSERVAZIONI	Spunti di approfondimento teorico
✔ VERIFICA LAMPO	Quesiti ed esercizi a risposta immediata al termine dei principali paragrafi di teoria
PALESTRA PER IL RECUPERO	Esercizi per chi ha difficoltà a superare i punti critici della teoria, con estensione online sul sito **www.scuola.com**
CLUB 5 CERCHI	Esercizi per il potenziamento e l'eccellenza, spesso tratti da gare di matematica
INFORMATH	Teoria ed esercitazioni per studiare utilizzando il computer

Visualizzazione passo per passo delle costruzioni geometriche sul CD-ROM allegato ai volumi Math Club *blu* Geometria e Math Club *blu* Matematica

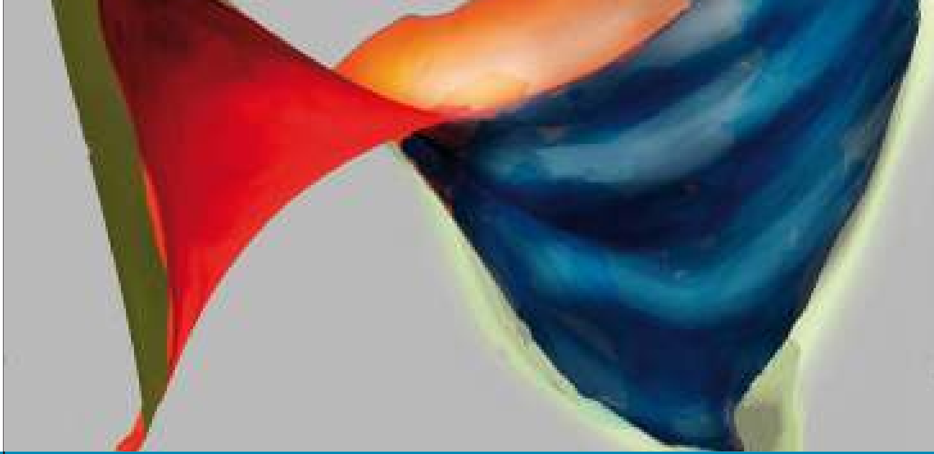
MODELLI E REALTÀ



La matematica serve a semplificare le cose complesse. Il mondo che ci circonda è infatti incredibilmente complesso; basta pensare al moto della Luna, alla forma di una foglia, all'imprevedibilità e all'evanescenza di un arcobaleno, al sofisticato sistema visivo di una mosca.
E alla complessità della natura si aggiungono le costruzioni e le invenzioni dell'uomo: edifici che sfidano la forza di gravità, sofisticatissimi congegni meccanici, computer e altri strumenti elettronici.
La matematica fornisce non solo il linguaggio, ma anche il metodo per interpretare i fenomeni fisici e chimici, per fare ordine nella complessità della biologia e della geologia, per aiutarci a migliorare e innovare la tecnologia esistente.
In molti casi si raggiunge questo fine realizzando dei modelli del fenomeno che si intende studiare:

- si isolano gli aspetti che si ritengono fondamentali
- si individuano le leggi che li legano tra loro e che ne determinano il comportamento
- si cerca di tradurre queste leggi in linguaggio matematico.

Per questo scopo la matematica dispone di un vocabolario ricchissimo: numeri, variabili, equazioni, poligoni, vettori e funzioni sono solamente alcuni dei vocaboli a sua disposizione. Il risultato di questa traduzione è il **modello matematico**: una versione approssimata della realtà, volutamente imprecisa, ma sufficientemente semplice da poter essere analizzata mediante deduzioni logiche.
I **dialoghi tra Ilaria e Orazio**, due ragazzi un po' fuori dall'ordinario, ci aiutano a capire come funziona questa "modellizzazione della realtà". Ilaria è appassionata di matematica e riesce ad applicarla alle situazioni più disparate. Orazio preferisce la storia, ma segue volentieri Ilaria nelle sue avventure intellettuali, anzi spesso viene da lui lo spunto per un nuovo problema da studiare. Le discussioni dei due amici partono sempre da un problema concreto, ma spesso il ragionamento matematico li porta a porsi domande più astratte, a interrogarsi su questioni più teoriche: sanno bene che il confine tra teoria e applicazioni non è mai netto, che ciò che ieri ci sembrava troppo teorico o astratto potrà oggi aiutarci a risolvere un problema concretissimo.
Come leggere i dialoghi di Ilaria e Orazio? Possibilmente con in mano carta e penna, per poter chiarire tramite esempi o calcoli i passaggi che non vi convincono. E magari lavorando a coppie, o a piccoli gruppetti. Ma sempre tenendo la mente aperta: provate a riflettere sulle domande che i due amici lasciano senza risposta e, soprattutto, ponetevene di nuove. Non importa se non riuscirete a rispondere a molte di queste domande: il solo fatto di esservele poste vi avrà fatto imparare sulla matematica più di quanto possiate immaginare.



Unità 1

RADICALI

Prerequisiti

- Sapere che cosa si intende per numero reale
- Saper calcolare il valore di espressioni algebriche

Obiettivi

- Conoscere le radici aritmetiche *n*-sime di un numero reale
- Saper operare con i radicali aritmetici
- Saper definire la potenza a esponente razionale di un numero reale
- Saper sviluppare espressioni algebriche letterali (e non letterali) contenenti radici *n*-sime

Competenze

- Utilizzare correttamente le tecniche e le procedure del calcolo numerico
- Utilizzare correttamente le tecniche e le procedure del calcolo letterale
- Dimostrare semplici formule algebriche

1. Radicali aritmetici

▶ DEFINIZIONE

Dato un numero n intero positivo, si chiama **radice n-sima aritmetica** del numero reale non negativo a il numero reale non negativo che, elevato a n, dà come risultato a.

ATTENZIONE!

$\sqrt[1]{a} = a$

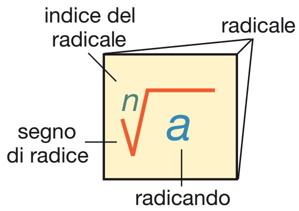
$\sqrt[0]{a}$ è priva di significato

Tale numero reale non negativo si indica con:

$$\sqrt[n]{a}$$

e, dalla definizione, risulta che $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.
Quindi, se a e b sono numeri reali non negativi, si ha l'equivalenza:

$$b = \sqrt[n]{a} \iff b^n = a$$



Il simbolo $\sqrt[n]{a}$ si chiama **radicale aritmetico**, il numero a **radicando** e il numero n **indice del radicale**.

Inoltre:

- $\sqrt[2]{a}$, che si scrive più semplicemente $\sqrt{a}$, si legge "radice quadrata di a";
- $\sqrt[3]{a}$ si legge "radice cubica di a".

Quando, in un radicale, il radicando ha la forma a^m, allora m si dice **esponente del radicando**.
L'operazione con la quale si passa da un numero a al numero $\sqrt[n]{a}$ si chiama **estrazione di radice n-sima**.

ESEMPI

1 Poiché $2^5 = 32$, risulta $\sqrt[5]{32} = 2$ e si legge "la radice quinta di 32 è uguale a 2".

2 $\sqrt{9} = 3$ perché $3^2 = 9$.

3 $\sqrt[3]{8} = 2$ perché $2^3 = 8$.

4 $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}} = \dfrac{2}{3}$ perché $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{16}{81}$.

MEMO

È importante osservare che:
- se a è un numero *positivo* anche $\sqrt[n]{a}$ è un numero positivo;
- se $a = 0$ allora $\sqrt[n]{a} = 0$.

Condizioni di esistenza

In base alla definizione, i radicali aritmetici, sia di indice pari sia di indice dispari, devono avere il radicando positivo o nullo.
Quando, nel radicando, compaiono lettere (che supporremo sempre rappresentare numeri reali), è necessario stabilire per quali valori attribuiti a esse il radicando risulta positivo o nullo.
L'insieme di questi valori si dice **insieme di esistenza**, e si dicono **condizioni di esistenza** (C.E.) le condizioni che devono essere rispettate dalle lettere perché i radicali abbiano significato.

ESEMPI

Determinare le condizioni di esistenza dei seguenti radicali aritmetici.

1 $\sqrt{3a^4x^2}$

Poiché a^4 e x^2, essendo potenze con esponente pari, sono sempre non negativi, il radicale esiste per ogni valore di a e di x.

2 $\sqrt{2a^2x^3}$

Poiché $a^2 \geq 0$ per ogni valore di a, il radicale esiste per $x \geq 0$.

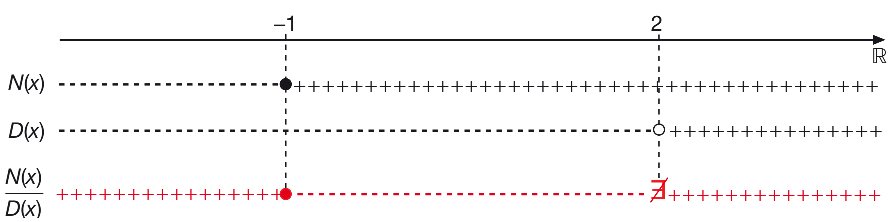
3 $\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{y-3}}$

Poiché $x^2 \geq 0$ per ogni valore di x, il radicale esiste per $y-3>0$, cioè per $y>3$. Si osservi che per $y=3$ il radicando perde significato perché si annulla il denominatore.

4 $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$

Perché questo radicale esista, deve essere $\dfrac{x+1}{x-2} \geq 0$.

Risolviamo graficamente la disequazione fratta:



Si trova quindi che il radicale esiste per $x \leq -1 \vee x>2$.

Segno di un radicale aritmetico

Il radicale $\sqrt{a^2}$ esiste per ogni valore a, perché a^2 è sempre non negativo. D'altra parte, per definizione, $\sqrt{a^2}$ è quel numero che, elevato al quadrato, dà il radicando, cioè a^2.

Pertanto, sembrerebbe ovvio porre:

$$\sqrt{a^2}=a$$

Tuttavia, questa uguaglianza *non sempre è vera*. Infatti, per esempio, per $a=2$ è vera ma non lo è per $a=-2$, perché $\sqrt{(-2)^2} \neq -2$.

Ricordando che il valore di ogni radicale è, per definizione, un numero positivo o nullo, bisogna porre:

$$\boxed{\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a<0 \end{cases}}$$

Per esempio:

$$\sqrt{(1-x)^2} = |1-x| = \begin{cases} 1-x & \text{se } 1-x \geq 0 \text{ cioè } x \leq 1 \\ x-1 & \text{se } 1-x < 0 \text{ cioè } x > 1 \end{cases}$$

Torneremo ancora, nel seguito, su questo argomento.

2. Proprietà invariantiva dei radicali

Molto utile nelle applicazioni è la proprietà invariantiva, che possiamo enunciare nel modo seguente.

▸ PROPRIETÀ INVARIANTIVA

Il valore di un radicale aritmetico non cambia se si moltiplicano sia l'indice della radice sia l'esponente del radicando per uno stesso numero p intero positivo:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} \qquad (1)$$

Dimostrazione

Per provare l'uguaglianza, basta verificare che i due numeri reali non negativi, $\sqrt[n]{a^m}$ e $\sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$, elevati allo stesso esponente danno risultati uguali.
Eleviamo dunque alla potenza np-esima i due membri dell'uguaglianza (1).

1° membro

$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{n \cdot p} =$

$= \left[\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right]^p =$ per le proprietà delle potenze

$= (a^m)^p = a^{m \cdot p}$ per definizione di radice n-sima aritmetica

2° membro

$\left(\sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}\right)^{n \cdot p} = a^{m \cdot p}$ per definizione di radice n-sima aritmetica

Poiché, elevandoli allo stesso esponente, i risultati sono uguali, possiamo concludere che i due numeri sono uguali.

Per esempio:

- $\sqrt{6} = \sqrt[4]{6^2}$
- $\sqrt[3]{5} = \sqrt[9]{5^3}$
- $\sqrt{3a} = \sqrt[4]{9a^2}$

Semplificazione di un radicale

Per la proprietà simmetrica dell'uguaglianza, la (1) può essere letta anche da destra a sinistra. Possiamo allora affermare che **il valore di un radicale aritmetico non cambia se si dividono sia l'indice del radicale sia l'esponente del radicando per un loro divisore comune positivo**.
Ne segue che è possibile **semplificare** un radicale dividendo l'indice del radicale e l'esponente del radicando per il loro M.C.D.

Per esempio:

- $\sqrt[4]{9}=\sqrt[4]{3^2}=\sqrt{3}$ avendo diviso l'indice della radice e l'esponente del radicando per 2
- $\sqrt[6]{125x^9y^6}=\sqrt[6]{5^3x^9y^6}=\sqrt[6]{(5x^3y^2)^3}=\sqrt{5x^3y^2}$ con $x\geq 0$
- $\sqrt[6]{9a^4x^4+12a^2x^4+4x^4}=\sqrt[6]{x^4(9a^4+12a^2+4)}=\sqrt[6]{x^4(3a^2+2)^2}=$
  $=\sqrt[6]{\left[x^2(3a^2+2)\right]^2}=\sqrt[3]{x^2(3a^2+2)}$

Se l'indice del radicale e l'esponente del radicando non hanno fattori in comune, il radicale si dice **irriducibile**.
Per esempio, sono irriducibili i radicali:

- $\sqrt[4]{27}=\sqrt[4]{3^3}$ perché l'indice del radicale e l'esponente del radicando sono primi tra loro
- $\sqrt[5]{4}=\sqrt[5]{2^2}$
- $\sqrt{a^2+b^2}$

ATTENZIONE!

- $\sqrt{a^2+b^2}\neq a+b$
perché
$a^2+b^2\neq(a+b)^2$
- $\sqrt[6]{10x^4y^4}$
non si può semplificare perché l'esponente del coefficiente è 1.

Ricordiamo che, per definizione:

1. i radicali aritmetici esistono quando i loro radicandi sono numeri non negativi;
2. i radicali aritmetici, quando esistono, sono numeri non negativi.

Queste due circostanze si devono verificare sia prima sia dopo la semplificazione. In particolare, nei casi in cui compaiono lettere nei radicandi, occorre fare, di volta in volta, una *discussione*, come verrà chiarito negli esempi che seguono.

ESEMPI

Semplificare i seguenti radicali aritmetici.

1 $\sqrt[6]{4a^4b^2}$

Il radicale esiste per ogni valore di a e di b, perché a^4 e b^2 sono due potenze di esponente pari. Poiché b può quindi essere sia positivo sia negativo, dobbiamo scrivere:

$$\sqrt[6]{4a^4b^2}=\sqrt[6]{2^2a^4b^2}=\sqrt[3]{2a^2|b|}=\begin{cases}\sqrt[3]{2a^2b} & \text{se } b\geq 0\\ \sqrt[3]{2a^2(-b)}=\sqrt[3]{-2a^2b} & \text{se } b<0\end{cases}$$

2 $\sqrt[4]{x^2-2x+1}$

Il radicale ha sempre significato perché il radicando $x^2-2x+1=(x-1)^2$ è sempre non negativo, ovvero risulta $(x-1)^2\geq 0$ per ogni x.
Per applicare la proprietà invariantiva, dobbiamo distinguere due casi, in modo che, a semplificazione avvenuta, il radicando risulti sempre positivo o nullo.

1° caso $x \geq 1$

Si ha $x-1 \geq 0$, quindi $\sqrt[4]{(x-1)^2} = \sqrt{x-1}$

2° caso $x < 1$

Si ha $x-1 < 0$, quindi $1-x > 0$. Poiché $(x-1)^2 = (1-x)^2$, si ottiene:

$$\sqrt[4]{(x-1)^2} = \sqrt{1-x}$$

Oppure, più rapidamente, possiamo scrivere:

$$\sqrt[4]{(x-1)^2} = \sqrt{|x-1|}$$

dove $|x-1|$ indica il valore assoluto di $(x - 1)$.

ATTENZIONE!

È necessario riflettere attentamente per evitare gravi e frequenti errori. Per esempio:

$\sqrt[4]{a^2}$ non è uguale a

$\sqrt{a}$, ma a $\sqrt{|a|}$;

$\sqrt[4]{(x-y)^2} \neq \sqrt{x-y}$

ma

$\sqrt[4]{(x-y)^2} = \sqrt{|x-y|}$

3 $\sqrt{a^2-6a+9}$

Tenendo conto delle osservazioni dell'esempio precedente, abbiamo:

$$\sqrt{(a-3)^2} = |a-3| = \begin{cases} a-3 & \text{se } a \geq 3 \\ 3-a & \text{se } a < 3 \end{cases}$$

4 $\sqrt[6]{4x^2-12xy+9y^2} = \sqrt[6]{(2x-3y)^2} = \sqrt[3]{|2x-3y|}$

5 $\sqrt{(9a^2-6ab+b^2)^3} = \sqrt{(3a-b)^6} = |3a-b|^3$

6 $\sqrt[3]{1+a^6+3a^4+3a^2} = \sqrt[3]{(1+a^2)^3} = 1+a^2$

Riduzione di più radicali allo stesso indice

La proprietà invariantiva permette di trasformare due o più radicali in altrettanti radicali equivalenti con lo stesso indice.
Per ridurre più radicali allo stesso indice, detto *minimo comune indice*, si procede nel seguente modo:

1. si semplifica, se possibile, ciascun radicale;
2. si determina il m.c.m. degli indici;
3. si assegna come indice, a ogni radicale, il m.c.m. degli indici e si moltiplica l'esponente di ogni radicando per il quoziente tra il m.c.m. e l'indice del radicale.

ESEMPIO

Ridurre allo stesso indice i radicali $\sqrt[8]{a^6b^{10}}$, $\sqrt[42]{a^{35}b^{14}}$, $\sqrt[40]{a^{15}b^{35}}$ *supponendo positivi tutti i radicandi.*

Prima di tutto semplifichiamo i radicali. Si ottiene:

$$\sqrt[4]{a^3b^5} \qquad \sqrt[6]{a^5b^2} \qquad \sqrt[8]{a^3b^7}$$

Determiniamo il m.c.m. degli indici: m.c.m. $(4, 6, 8) = 24$.

▶▶ Assumendo 24 come indice comune, otteniamo i seguenti radicali equivalenti a quelli dati:

$$\sqrt[24]{a^{3\cdot 6}b^{5\cdot 6}} \qquad \sqrt[24]{a^{5\cdot 4}b^{2\cdot 4}} \qquad \sqrt[24]{a^{3\cdot 3}b^{7\cdot 3}}$$

cioè:

$$\sqrt[24]{a^{18}b^{30}} \qquad \sqrt[24]{a^{20}b^{8}} \qquad \sqrt[24]{a^{9}b^{21}}$$

✔ VERIFICA LAMPO

1 Completare.

a) Il simbolo $\sqrt[n]{a}$ rappresenta un numero reale quando ....

b) n si chiama ....
ed è un numero ....

c) a si chiama ....
e deve essere un numero ....

2 Dire quali dei seguenti simboli rappresentano numeri reali.

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt[4]{0}$ c) $\sqrt[5]{-0}$

d) $\sqrt[4]{18}$ e) $\sqrt[4]{-18}$ f) $\sqrt[3]{-27}$

3 Dire per quali valori di x i seguenti radicali aritmetici hanno significato.

$\sqrt{x-2}$ $\sqrt[4]{x^2+5}$ $\sqrt[6]{-x^2-3}$ $\sqrt[3]{x(x-1)}$ $\sqrt{2-3x}$

Completare.

4 a) $\sqrt[4]{(x-2)^2} = \begin{cases} \text{.......} & \text{se } x \geq 2 \\ \text{.......} & \text{se } x < 2 \end{cases}$

b) $\sqrt[4]{x^2} = \begin{cases} \text{.......} & \text{se } x \geq 0 \\ \text{.......} & \text{se } x < 0 \end{cases}$ oppure $\sqrt[4]{x^2} = \sqrt{\text{.......}}$

5 $\sqrt{y^2-4y+4} = \sqrt{(\text{.......})^2} = \begin{cases} \text{.......} \\ \text{.......} \end{cases}$ oppure $\sqrt{(\text{.......})^2} = \text{.......}$

3. Moltiplicazione e divisione di radicali aritmetici

Vediamo ora come operare con i radicali.

▶ TEOREMA 1

Se a e b sono numeri reali non negativi e n è un numero intero positivo, allora:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \tag{2}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad (b \neq 0) \tag{3}$$

Dimostrazione

Per provare la (2) è sufficiente dimostrare che, elevando entrambi i membri alla potenza n–sima, si ottengono risultati uguali. Infatti, per la proprietà della potenza di un prodotto e per definizione di radice n–sima, si ha:

$$\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{b}\right)^n=a\cdot b \qquad \text{e} \qquad \left(\sqrt[n]{a\cdot b}\right)^n=a\cdot b$$

I risultati ottenuti sono uguali, quindi la (2) è dimostrata. In modo analogo è possibile dimostrare la (3).

È importante osservare che due radicali si possono moltiplicare o dividere tra loro **solo se hanno lo stesso indice**. In caso contrario, è necessario ridurli prima allo stesso indice.

Per esempio:

- $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{15}$
- $\sqrt[5]{a^2}\cdot\sqrt[5]{a}=\sqrt[5]{a^3}$ con $a\geq 0$
- $\sqrt{5}\cdot\sqrt[4]{2}$

  Poiché gli indici sono diversi, per poter eseguire la moltiplicazione è necessario ridurre i radicali allo stesso indice. Il m.c.m. tra gli indici è 4, quindi si ha:

  $=\sqrt[4]{5^2}\cdot\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{50}$
- $\sqrt{6}:\sqrt{3}=\sqrt{2}$
- $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}:\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}:\frac{1}{4}}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot 4}=\sqrt[3]{2}$
- $\dfrac{\sqrt{a^3b}}{\sqrt{ab^3}}=\sqrt{\dfrac{a^3b}{ab^3}}=\sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}}=\dfrac{a}{b}$ con $a>0,\ b>0$
- $\sqrt{3}:\sqrt[3]{9}=\sqrt[6]{3^3}:\sqrt[6]{9^2}=\sqrt[6]{\dfrac{3^3}{3^4}}=\sqrt[6]{\dfrac{1}{3}}$

Le uguaglianze (2) e (3) possono anche essere lette da destra a sinistra, così da ottenere altrettante proprietà utili nelle applicazioni.

Proprietà distributiva dell'estrazione di radice *n*-sima rispetto alla moltiplicazione

La radice n-sima aritmetica del prodotto di fattori non negativi è uguale al prodotto delle radici n-sime aritmetiche dei singoli fattori.
In simboli:

$$\boxed{\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}}$$

Per esempio:

- $\sqrt{4\cdot 7}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{7}=2\sqrt{7}$
- $\sqrt[10]{a^5b^2}=\sqrt[10]{a^5}\cdot\sqrt[10]{b^2}=\sqrt{a}\cdot\sqrt[5]{|b|}$

ATTENZIONE!

Semplificando $\sqrt[10]{a^5}$ *non* è necessario mettere il valore assoluto perché, per le condizioni di esistenza del radicale, deve essere $a\geq 0$.
Nulla sappiamo invece del segno di b, per cui semplificando $\sqrt[10]{b^2}$ è necessario mettere il valore assoluto.

- $\sqrt[4]{(x-y)^2 y^2} = \sqrt[4]{(x-y)^2} \cdot \sqrt[4]{y^2} = \sqrt{|x-y|} \cdot \sqrt{|y|}$

Proprietà distributiva dell'estrazione di radice *n*-sima rispetto alla divisione

La radice n-sima aritmetica del quoziente di due numeri non negativi a e b (con $b \neq 0$) è uguale al quoziente delle radici n-sime aritmetiche del dividendo e del divisore.
In simboli:

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad b \neq 0}$$

Per esempio:

- $\sqrt{\dfrac{7}{9}} = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{9}} = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$
- $\sqrt[3]{\dfrac{x^3}{y}} = \dfrac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt[3]{y}} = \dfrac{x}{\sqrt[3]{y}} \qquad (x \geq 0, y > 0)$
- $\sqrt[4]{\dfrac{a^2+2ab+b^2}{b^2}} = \dfrac{\sqrt[4]{(a+b)^2}}{\sqrt[4]{b^2}} = \dfrac{\sqrt{|a+b|}}{\sqrt{|b|}}$

✔ VERIFICA LAMPO

1 Eseguire le operazioni tra radicali dopo aver determinato, se necessario, le condizioni di esistenza.

a) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{6}$

b) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt{a}$

c) $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$

d) $\dfrac{\sqrt[6]{x^4}}{\sqrt[12]{x}}$

e) $\left(\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{\dfrac{x}{y}} : \sqrt[4]{\dfrac{y^2}{x}}\right) : \left(\sqrt[6]{y} \cdot \sqrt[4]{\dfrac{x^2}{y^3}} \cdot \sqrt{\dfrac{x}{y}}\right)$

2 Completare $(x, y \in \mathbb{R})$.

a) $\sqrt{3 \cdot 5} = \sqrt{\dots} \cdot \sqrt{\dots}$

b) $\sqrt[10]{x^5 y^2} = \sqrt[\dots]{\dots} \cdot \sqrt[\dots]{\dots} = \sqrt[\dots]{\dots} \cdot \sqrt[\dots]{|\dots|}$

c) $\sqrt{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} =$

$= \sqrt{(\dots)^3} = \sqrt{(\dots)^2} \cdot \sqrt{\dots} = \dots$

3 Completare $(a, b, x \in \mathbb{R})$.

a) $\sqrt[3]{\dfrac{x^3}{a}} = \dfrac{\sqrt[3]{\dots}}{\sqrt{\dots}} = \dots$ b) $\sqrt[4]{\dfrac{a^2+2ab+b^2}{x^2}} = \dfrac{\sqrt[4]{\dots}}{\sqrt[4]{\dots}} = \dots$

4. Trasporto di un fattore sotto radice

Nelle espressioni con i radicali, a volte occorre eseguire delle moltiplicazioni in cui uno dei fattori è un radicale e l'altro no.

Per esempio, per calcolare il prodotto $2\cdot\sqrt[3]{5}$, osserviamo innanzitutto che, per definizione, $2=\sqrt[3]{2^3}$; quindi possiamo scrivere:

$$2\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{2^3\cdot 5}=\sqrt[3]{40}$$

In generale, se a e b sono numeri reali non negativi, si ha:

$$a\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}$$

e anche:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a^n}{b}} \qquad \text{e} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{b}=\sqrt[n]{\frac{a}{b^n}} \qquad \text{con } b\neq 0$$

In questi casi si dice che *si è trasportato il fattore a* (o *il fattore b*) *sotto il segno di radice*. Si può quindi enunciare la seguente regola.

▶ REGOLA Trasporto di un fattore non negativo sotto il segno di radice

Un fattore non negativo che moltiplica un radicale può essere trasportato sotto radice come fattore del radicando, purché si moltiplichi il suo esponente per l'indice del radicale.

L'operazione di trasporto sotto il segno di radice richiede una certa attenzione quando il fattore fuori radice è *negativo* oppure *non se ne conosce il segno*.
Per esempio, se si vuole eseguire la moltiplicazione:

$$-3\sqrt{2}$$

si deve tenere presente che questo prodotto è negativo, perché i fattori sono discordi.
Perciò, per garantire la validità dell'uguaglianza, si dovrà scrivere:

$$-3\sqrt{2}=-\sqrt{3^2\cdot 2}=-\sqrt{18}$$

ATTENZIONE!
È un errore scrivere:
$-3\sqrt{2}=\sqrt{(-3)^2\cdot 2}=$
$=\sqrt{18}$

Da queste considerazioni segue che l'operazione di trasporto può essere effettuata anche quando il fattore da trasportare sotto il segno di radice è *negativo*. Si può quindi enunciare la seguente regola.

▶ REGOLA Trasporto di un fattore negativo sotto il segno di radice

Per trasportare sotto radice un fattore negativo che moltiplica un radicale, si deve trasportare sotto radice il **valore assoluto** del fattore, lasciando il segno meno fuori dal radicale.

ESEMPI

Portare sotto radice il fattore esterno nei seguenti prodotti. Supporre a, b, x, y positivi.

1 $2\sqrt{3}=\sqrt{2^2\cdot 3}=\sqrt{12}$

2 $2\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{2^2\cdot\frac{3}{8}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$

▶▶

3 $\frac{1}{ab}\sqrt[4]{a^3b^5} = \sqrt[4]{\frac{1}{(ab)^4}a^3b^5} = \sqrt[4]{\frac{a^3b^5}{a^4b^4}} = \sqrt[4]{\frac{b}{a}}$

4 $3a^2b\sqrt[n]{3ab^2} = \sqrt[n]{3^n a^{2n} b^n \cdot 3ab^2} = \sqrt[n]{3^{n+1}a^{2n+1}b^{n+2}}$

5 $\frac{x^2y^2}{\sqrt[3]{x^4y^6}} = \sqrt[3]{\frac{x^6y^6}{x^4y^6}} = \sqrt[3]{x^2}$

6 $(a+b)\sqrt{\frac{1}{a^3+b^3}} = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{a^3+b^3}} = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}} = \sqrt{\frac{a+b}{a^2-ab+b^2}}$

Portare sotto radice il fattore esterno nei seguenti prodotti.

7 $b\sqrt{a}$ con $a \geq 0$

Dobbiamo distinguere due casi, a seconda del segno di b:

- se $b \geq 0$ allora $b\sqrt{a} = \sqrt{ab^2}$
- se $b < 0$ allora $b\sqrt{a} = -\sqrt{a(-b)^2} = -\sqrt{ab^2}$

8 $(\sqrt{3}-2)\sqrt{5}$

Poiché $\sqrt{3}-2$ è un numero negativo, abbiamo:

$= -(2-\sqrt{3})\sqrt{5} = -\sqrt{5(2-\sqrt{3})^2}$

9 $\frac{1}{x-1}\sqrt{x^2-1}$

Le condizioni di esistenza sono $x^2-1 \geq 0 \wedge x \neq 1$, cioè l'espressione esiste per $x \leq -1 \vee x > 1$. Abbiamo due casi:

- se $x \leq -1$ allora $x-1 < 0$, quindi:

$$\frac{1}{x-1}\sqrt{x^2-1} = -\sqrt{\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2}} = -\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

- se $x > 1$ allora $x-1 > 0$, quindi:

$$\frac{1}{x-1}\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2}} = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

5. Trasporto di un fattore fuori radice

Per la proprietà distributiva dell'estrazione di radice rispetto alla moltiplicazione e alla divisione (paragrafo 3), si ha, se $a \geq 0$:

$$\sqrt[n]{a^nb} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = a\sqrt[n]{b} \qquad \text{e} \qquad \sqrt[n]{\frac{a^n}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a^n}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a}{\sqrt[n]{b}} \qquad \text{con } b \neq 0$$

perché $\sqrt[n]{a^n} = a$.

Per esempio, supponendo a e b numeri positivi, si ha:

- $\sqrt[5]{a^5b^2} = \sqrt[5]{a^5} \cdot \sqrt[5]{b^2} = a\sqrt[5]{b^2}$
- $\sqrt[3]{ab^6} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b^6} = b^2\sqrt[3]{a}$
- $\sqrt[7]{\dfrac{b}{a^{14}}} = \dfrac{\sqrt[7]{b}}{\sqrt[7]{a^{14}}} = \dfrac{\sqrt[7]{b}}{a^2}$

In generale, si può quindi enunciare la seguente regola.

▶ REGOLA Trasporto fuori dal segno di radice di un fattore non negativo di esponente multiplo dell'indice

Dato un radicale di indice n, un fattore del radicando, con base non negativa ed esponente $m = kn$ (cioè multiplo di n), può essere **trasportato fuori** dal segno di radice come fattore con ugual base ed esponente k (quoziente tra m e n).

Consideriamo ora il radicale $\sqrt[4]{a^{11}b}$ con a, b concordi.
Utilizzando le proprietà delle potenze, tale radicale può essere scritto nel modo seguente:

$$\sqrt[4]{a^{11}b} = \sqrt[4]{a^8 \cdot a^3 \cdot b} = \sqrt[4]{a^8} \cdot \sqrt[4]{a^3b} = a^2\sqrt[4]{a^3b}$$

Si osservi che:

- 11 è l'esponente del fattore a del radicando;
- 4 è l'indice del radicale

e che $11 : 4 = 2$ con resto 3. Quindi:

- 2, quoziente tra 11 e 4, è l'esponente del fattore a portato fuori radice;
- 3, resto della divisione, è l'esponente del fattore a che rimane sotto il segno di radice.

Si può quindi enunciare la seguente regola, che generalizza la precedente.

▶ REGOLA Trasporto fuori dal segno di radice di un fattore non negativo di esponente maggiore dell'indice

Dato un radicale di indice n, un fattore del radicando, con base non negativa ed esponente m maggiore di n (ma non multiplo di n), può essere **parzialmente trasportato fuori** dal segno di radice nel modo seguente:

- fuori radice si scrive il fattore con esponente uguale al quoziente q della divisione $\dfrac{m}{n}$;
- sotto radice rimane il fattore con esponente uguale al resto r della divisione $\dfrac{m}{n}$.

MEMO

Dato $\sqrt[n]{a^m}$ con $m > n$ e $m = nq + r$, si ha:

$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{nq+r}} =$
$= \sqrt[n]{a^{nq} \cdot a^r} =$
$= \sqrt[n]{a^{nq}} \cdot \sqrt[n]{a^r} =$
$= \sqrt[n]{(a^q)^n} \cdot \sqrt[n]{a^r} =$
$= a^q \cdot \sqrt[n]{a^r}$

Per esempio, supponendo a, b, x, y e z numeri reali non negativi, si ha:

- $\sqrt[4]{243x^5y^7} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 3 \cdot x^4 \cdot x \cdot y^4 \cdot y^3} = 3xy \cdot \sqrt[4]{3xy^3}$
- $\sqrt[3]{\dfrac{x^7y^3 - x^5y^4}{4z^3 - 8z^4}} = \sqrt[3]{\dfrac{x^5y^3(x^2 - y)}{4z^3(1-2z)}} = \dfrac{xy}{z} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{x^2(x^2-y)}{4(1-2z)}}$ con $z \neq 0 \wedge z \neq \dfrac{1}{2}$
- $\sqrt[3]{a^{6n}b^{3n+1}x^{6n+2}} = \sqrt[3]{a^{6n}b^{3n}bx^{6n}x^2} = a^{2n}b^nx^{2n}\sqrt[3]{bx^2}$
- $\sqrt[n]{a^{2n+1}b^{n+2}} = \sqrt[n]{a^{2n} \cdot a \cdot b^n \cdot b^2} = a^2b\sqrt[n]{ab^2}$

Consideriamo infine la situazione in cui *non si conosce il segno della base* della potenza che rappresenta il fattore da portare fuori dal segno di radice.
In tal caso, si deve procedere tenendo presente che il radicale dato e l'espressione ottenuta devono avere lo *stesso segno*.

ESEMPI

Portare fuori dal segno di radice i fattori possibili nei seguenti radicali.

1 $\sqrt{9x^2y}$

Si osservi che, per l'esistenza del radicale, deve essere $y \geq 0$ e x qualsiasi. Perciò risulta:

$$=\sqrt{3^2x^2y}=3|x|\sqrt{y}=\begin{cases}3x\sqrt{y} & \text{se } x\geq 0\\ -3x\sqrt{y} & \text{se } x<0\end{cases}$$

2 $\sqrt{5(a-2)^2}$

Osserviamo che $(a-2)^2$ è sicuramente positivo o nullo, quindi il radicale esiste per ogni a.
Tuttavia, $(a-2)$ può essere positivo o negativo o nullo, quindi si ha:

$$=|a-2|\sqrt{5}=\begin{cases}(a-2)\sqrt{5} & \text{se } a>2\\ 0 & \text{se } a=2\\ (2-a)\sqrt{5} & \text{se } a<2\end{cases}$$

3 $\sqrt{a^3b-2a^2b^2+ab^3}$ con a e b concordi.

Si ha:

$$=\sqrt{ab(a^2-2ab+b^2)}=\sqrt{ab(a-b)^2}=|a-b|\sqrt{ab}$$

In particolare:

$$|a-b|\cdot\sqrt{ab}=\begin{cases}(a-b)\sqrt{ab} & \text{se } a>b\\ 0 & \text{se } a=b\\ (b-a)\sqrt{ab} & \text{se } a<b\end{cases}$$

MEMO

$$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}|a|, & \text{se } n \text{ pari}\\ a, & \text{se } n \text{ dispari}\end{cases}$$

✔ VERIFICA LAMPO

Trasportare sotto il segno di radice i fattori esterni.

1 In $\mathbb{R}^+$:

a) $3\sqrt{5}=$ ....

b) $(x+y)\sqrt{\dfrac{1}{x^3+y^3}}=$ ....

c) $2a^2b\sqrt[n]{2ab^2}=$ ....

d) $\dfrac{a^2b^2}{\sqrt[3]{a^4b^6}}=$ ....

2 In $\mathbb{R}$:

a) $-5\sqrt{2} = -\dots\dots$

b) $a\sqrt{3} = \dots\dots$

c) $(2-a)\sqrt{5} = \begin{cases} \dots\dots \\ \dots\dots \end{cases}$

d) $\dfrac{x}{\sqrt{2-x}} = \begin{cases} \dots\dots \\ \dots\dots \end{cases}$

Portare fuori dal segno di radice i fattori possibili.

3 In $\mathbb{R}^+$:

a) $\sqrt{x^{16}y^4} = \dots\dots$

b) $\sqrt[4]{a^4x^2 + a^4y^2} = \sqrt[4]{a^4(\dots\dots)} = \dots\dots$

c) $\sqrt[3]{x^6(1+y)^5} = \dots\dots$

d) $\sqrt[3]{a^{6n}b^{3n+3}x^{6n+3}} = \dots\dots$

4 In $\mathbb{R}$:

a) $\sqrt{8x^3 - 16ax^2} = \sqrt{\dots\dots(\qquad)} =$

$= 2|\dots\dots|\sqrt{\dots\dots} = \begin{cases} \dots\dots \\ \dots\dots \end{cases}$

b) $\sqrt{4a^2y - 4ay + y} =$

$= \dots\dots = |\dots\dots|\sqrt{\dots\dots} = \begin{cases} \dots\dots \\ \dots\dots \end{cases}$

6. Potenza e radice di un radicale aritmetico

▶ REGOLA

Se a è un numero reale non negativo e m, n, p sono numeri interi positivi, allora:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p} \tag{4}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} \tag{5}$$

Per esempio:

- $\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 = \sqrt[3]{9}$
- $\left(\sqrt{5}\right)^4 = \sqrt{5^4} = 5^2 = 25$
- $\sqrt[3]{\sqrt{6}} = \sqrt[6]{6}$
- $\sqrt{\sqrt{\sqrt{8}}} = \sqrt[8]{8}$

Le uguaglianze (4) e (5) possono anche essere lette da destra a sinistra, così da ottenere altrettante proprietà utili nelle applicazioni.

Radice di una potenza

$$\boxed{\sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p \quad \text{con } a \geq 0}$$

Per esempio:

- $\sqrt[5]{32^6} = (\sqrt[5]{32})^6 = 2^6 = 64$
- $\sqrt[4]{a^{20}} = (\sqrt[4]{a^4})^5 = |a|^5$

Radice di indice *m* · *n*

$$\boxed{\sqrt[m \cdot n]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} \quad \text{con } a \geq 0}$$

Per esempio:

- $\sqrt[6]{64} = \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2$
- $\sqrt[10]{49} = \sqrt[5]{\sqrt{49}} = \sqrt[5]{7}$

7. Somma algebrica di radicali aritmetici

In una espressione del tipo:

$$a\sqrt[n]{x} \quad \text{con } x \geq 0$$

il numero reale a è detto **coefficiente** del radicale $\sqrt[n]{x}$.

Due espressioni del tipo:

$$a\sqrt[n]{x} \qquad \text{e} \qquad b\sqrt[n]{x} \quad \text{con } x \geq 0$$

in cui i radicali hanno lo stesso indice e lo stesso radicando e che differiscono solo per il coefficiente, si dicono **radicali simili**.
Per esempio, sono radicali simili le espressioni:

$$\sqrt[4]{a^3 b} \qquad \frac{3}{4}\sqrt[4]{a^3 b} \qquad -5\sqrt[4]{a^3 b} \qquad a\sqrt[4]{a^3 b} \quad \text{con } a, b \text{ concordi}$$

I radicali simili si trattano come i monomi simili e, pertanto, volendo addizionare algebricamente due o più radicali simili, si devono applicare le stesse regole usate per la somma di monomi simili.

▶ REGOLA Somma algebrica di radicali simili

La somma algebrica di due o più radicali simili è un radicale simile ai radicali dati, che ha come coefficiente la somma algebrica dei coefficienti.

ESEMPI

Calcolare la somma algebrica dei seguenti radicali.

1 $\sqrt{5}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

2 $5\sqrt[3]{3}+4\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{3}=6\sqrt[3]{3}$

3 $3\sqrt[4]{x}+5\sqrt[4]{x}-7\sqrt[3]{y}-4\sqrt[4]{x}+8\sqrt[3]{y}=4\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y}$ con $x\geq 0$ e $y\geq 0$

4 $\sqrt{x}-2\sqrt{xy^2}+\sqrt{xy^4}$ con $y\geq 0$ e $x\geq 0$

Apparentemente, in questa somma non compaiono radicali simili. Osserviamo però che nel secondo e nel terzo radicale si possono portare fuori dalla radice alcuni fattori. Si ha quindi:

$$=\sqrt{x}-2y\sqrt{x}+y^2\sqrt{x}=(1-2y+y^2)\sqrt{x}=(1-y)^2\sqrt{x}$$

5 $\sqrt{x^3y}-2x\sqrt{xy}+\sqrt{x^5y^3}$ con $x\geq 0, y\geq 0$

$$=x\sqrt{xy}-2x\sqrt{xy}+x^2y\sqrt{xy}=(x-2x+x^2y)\sqrt{xy}=x(xy-1)\sqrt{xy}$$

OSSERVAZIONE

Se i radicali non sono simili, la somma deve essere lasciata indicata. Perciò, per non incorrere in gravi errori, si deve tenere presente che, in generale:

$\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$ non è uguale a $\sqrt[n]{a+b}$

e

$\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}$ non è uguale a $\sqrt[n]{a-b}$

Viceversa:

$\sqrt[n]{a+b}$ non è uguale a $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$

e

$\sqrt[n]{a-b}$ non è uguale a $\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}$

cioè, i radicali in cui il radicando è una somma algebrica *non* sono sostituibili con due o più radicali. In modo analogo:
quando, in un radicale, il radicando è una somma, non si può portare fuori dalla radice un addendo.

✔ VERIFICA LAMPO

1 Calcolare.

a) $(\sqrt[3]{5})^2$

b) $(\sqrt{x})^4$

c) $\left(\sqrt[4]{\dfrac{a^2}{b^4}}\right)^2$

2 Completare ($a \in \mathbb{R}$).

a) $\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\ldots\ldots}$

b) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{\sqrt{6}}} = \sqrt[\ldots]{\ldots\ldots}$

Calcolare le seguenti somme ($a \geq 0$, $b \geq 0$).

3 $\sqrt{a} + 2\sqrt{b} - 2\sqrt{a} + \sqrt{b}$

4 $\sqrt{50} - \sqrt{49} + 3\sqrt{5} + \sqrt{4}$

5 $\sqrt{2a+2b} - a\sqrt{2}$

6 $\sqrt{a+b} - \sqrt{a} - \sqrt{b}$

8. Espressioni con i radicali aritmetici

▶ DEFINIZIONE

Si chiama **espressione con i radicali**, o **espressione irrazionale**, un'espressione nella quale sono presenti operazioni di estrazione di radice.

I seguenti esempi mostrano come si possono semplificare alcune espressioni con i radicali applicando i teoremi e le regole studiati.

ESEMPI

Semplificare le seguenti espressioni.

1 $\sqrt{3}\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2$

L'espressione assegnata è costituita da due addendi.
Eseguiamo il prodotto indicato nel primo addendo e sviluppiamo il quadrato di binomio:

$$= \sqrt{6} - \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 =$$

Calcoliamo i quadrati e riduciamo i termini simili:

$$= \sqrt{6} - 3 + 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 2 + 3\sqrt{6}$$

2 $\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{45} + \sqrt{75} - 4\left(2\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)$

Eseguiamo il prodotto:

$$= \sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{45} + \sqrt{75} - 8\sqrt{5} + 4\sqrt{3} =$$

Attenzione: apparentemente i radicali non sono simili e quindi non sembra possano essere sommati; tuttavia, scomponendo in fattori i radicandi, vediamo che è possibile portar fuori dal segno di radice alcuni fattori ottenendo dei radicali simili:

$$= \sqrt{2^2 \cdot 3} - \sqrt{3^3} + \sqrt{3^2 \cdot 5} + \sqrt{3 \cdot 5^2} - 8\sqrt{5} + 4\sqrt{3} =$$

$$= 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 3\sqrt{5} + 5\sqrt{3} - 8\sqrt{5} + 4\sqrt{3} =$$

▶▶

Sommiamo i radicali simili:

$$= 8\sqrt{3} - 5\sqrt{5}$$

3 $\sqrt[3]{a^7 + 2a^6} - a\sqrt[3]{8a+16} + \sqrt[6]{a^2+4a+4}$ con $a \geq 0$

Scomponiamo in fattori i radicandi:

$$= \sqrt[3]{a^6(a+2)} - a\sqrt[3]{8(a+2)} + \sqrt[6]{(a+2)^2} =$$

Dove possibile, semplifichiamo e portiamo i fattori fuori dal segno di radice:

$$= a^2 \cdot \sqrt[3]{a+2} - 2a\sqrt[3]{a+2} + \sqrt[3]{a+2} =$$

I radicali ottenuti sono tutti simili tra loro, quindi possono essere sommati. Si ha dunque:

$$= (a^2 - 2a + 1)\sqrt[3]{a+2} = (a-1)^2 \cdot \sqrt[3]{a+2}$$

9. Razionalizzazione del denominatore di una frazione

Quando nel denominatore di una frazione compaiono dei radicali, è opportuno trasformare la frazione in un'altra equivalente il cui denominatore non contenga radicali. Tale operazione prende il nome di **razionalizzazione del denominatore**.

La razionalizzazione si effettua moltiplicando sia il numeratore sia il denominatore della frazione per un fattore opportuno, diverso da zero, detto **fattore razionalizzante**.

Illustriamo il procedimento, considerando i casi più frequenti che si possono presentare.

La frazione presenta a denominatore un solo radicale quadratico

La frazione ha la forma:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} \qquad \text{con } b > 0$$

Per razionalizzarla, *si moltiplicano numeratore e denominatore per il radicale che compare a denominatore*.

Quindi, il fattore razionalizzante è $\sqrt{b}$ e si ha:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

ESEMPI

Razionalizzare i denominatori delle seguenti frazioni.

1 $\dfrac{4}{\sqrt{2}} = \dfrac{4\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

2 $\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{(3+\sqrt{3})\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}+3}{3} = \dfrac{3(\sqrt{3}+1)}{3} = \sqrt{3}+1$

3 $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{18}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3^2\cdot 2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

4 $\dfrac{a+b}{\sqrt{a+b}}=\dfrac{(a+b)\cdot\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{a+b}}=\dfrac{(a+b)\sqrt{a+b}}{a+b}=\sqrt{a+b}\qquad \text{con } a+b>0$

ATTENZIONE!
Nell'esempio 3, il fattore razionalizzante è $\sqrt{2}$.

La frazione presenta a denominatore un solo radicale con indice qualunque

La frazione ha la forma:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}\qquad \text{con } b>0 \text{ e } n>m$$

Il fattore razionalizzante è un radicale con indice n, il cui radicando ha la stessa base e esponente uguale alla differenza $(n-m)$: $\sqrt[n]{b^{n-m}}$.

ATTENZIONE!
Se fosse $n < m$, per riportare la frazione alla forma indicata, sarebbe sufficiente semplificare il radicando applicando le regole per il trasporto di un fattore fuori dal segno di radice.

ESEMPIO

Per razionalizzare il denominatore della frazione:

$$\frac{6}{\sqrt[5]{3^2}}$$

occorre avere a denominatore $\sqrt[5]{3^5}$. Poiché $\sqrt[5]{3^2}\cdot\sqrt[5]{3^3}=\sqrt[5]{3^5}$, è sufficiente moltiplicare numeratore e denominatore della frazione per $\sqrt[5]{3^3}$.
Risulta allora:

$$\frac{6}{\sqrt[5]{3^2}}=\frac{6}{\sqrt[5]{3^2}}\cdot\frac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^3}}=\frac{6\sqrt[5]{3^3}}{3}=2\sqrt[5]{3^3}$$

• Si osservi che l'esponente 3 del radicando è uguale a 5 – 2.

In generale:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m}\cdot\sqrt[n]{b^{n-m}}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{m+n-m}}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^n}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}\qquad \text{con } b>0$$

ESEMPI

Razionalizzare i denominatori delle seguenti frazioni.

1 $\dfrac{3}{\sqrt[3]{9}}=\dfrac{3}{\sqrt[3]{3^2}}=\dfrac{3\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^2}\cdot\sqrt[3]{3}}=\dfrac{3\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^3}}=\dfrac{3\sqrt[3]{3}}{3}=\sqrt[3]{3}$

2 $\dfrac{2a^2b}{\sqrt[5]{8a^4}}=\qquad \text{con } a>0$

$$=\frac{2a^2b}{\sqrt[5]{2^3a^4}}=\frac{2a^2b\cdot\sqrt[5]{2^2a}}{\sqrt[5]{2^3a^4}\cdot\sqrt[5]{2^2a}}=\frac{2a^2b\cdot\sqrt[5]{4a}}{\sqrt[5]{2^5a^5}}=\frac{2a^2b\cdot\sqrt[5]{4a}}{2a}=ab\sqrt[5]{4a}$$

La frazione presenta a denominatore la somma o la differenza di due radicali quadratici

La frazione ha la forma:

$$\frac{c}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}\qquad \text{con } a>0 \text{ e } b>0$$

Tenendo presente il prodotto notevole:

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b$$

si deduce che, per razionalizzare la frazione data, *si devono moltiplicare numeratore e denominatore per la somma* $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$, *se a denominatore compare la differenza, oppure per la differenza* $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$, *se a denominatore compare la somma*.

Si procede in modo analogo se la frazione si presenta nella forma:

$$\frac{c}{a\pm\sqrt{b}} \qquad \text{oppure} \qquad \frac{c}{\sqrt{a}\pm b}$$

ESEMPI

Razionalizzare i denominatori delle seguenti frazioni.

1 $\dfrac{2\sqrt{7}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{7}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=\dfrac{2\sqrt{7}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\dfrac{2\sqrt{7}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3}=$
$=\sqrt{7}(\sqrt{5}+\sqrt{3})$

2 $\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\dfrac{4(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})}=\dfrac{4(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2}=\dfrac{4(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{7-3}=\sqrt{7}-\sqrt{3}$

3 $\dfrac{10}{3\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{10(3\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(3\sqrt{3}+\sqrt{2})(3\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\dfrac{10(3\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(3\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=$
$=\dfrac{10(3\sqrt{3}-\sqrt{2})}{27-2}=\dfrac{2(3\sqrt{3}-\sqrt{2})}{5}$

4 $\dfrac{8}{3\sqrt{5}-7}=\dfrac{8(3\sqrt{5}+7)}{(3\sqrt{5}-7)(3\sqrt{5}+7)}=\dfrac{8(3\sqrt{5}+7)}{45-49}=\dfrac{8(3\sqrt{5}+7)}{-4}=-2(3\sqrt{5}+7)$

5 $\dfrac{a}{a+\sqrt{a}}=\dfrac{a(a-\sqrt{a})}{(a+\sqrt{a})(a-\sqrt{a})}=\dfrac{a(a-\sqrt{a})}{a(a-1)}=\dfrac{a-\sqrt{a}}{a-1}$ C.E.: $a>0 \ \wedge \ a\neq 1$

10. Radicali doppi

▶ DEFINIZIONE

Si chiama **radicale doppio** ogni espressione della forma:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} \qquad \text{oppure} \qquad \sqrt{a-\sqrt{b}}$$

Un radicale doppio può essere scritto come somma di due radicali semplici:

- riconoscendo nel radicando lo sviluppo del quadrato di un binomio

oppure

- applicando la formula:

$$\boxed{\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}} \qquad (6)$$

in cui $a\geq 0$, $b\geq 0$ e $a^2-b>0$.

ATTENZIONE!

Conviene applicare la formula (6) solo quando il radicando a^2-b risulta un quadrato perfetto.